

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ И КАЧЕСТВА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

УДК 629.7.072.8

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ АВИАЦИОННЫХ КОМПЛЕКСОВ

Э. В. Лапшин

Аппроксимация характеристик летательного аппарата (ЛА), силовой установки, а также бортового комплекса ЛА составляет часть информационной технологии идентификации авиационных тренажеров (АТ). Как уже отмечалось, идентификация выполняется не только в интересах разработки технических средств обучения (ТСО), но и для обеспечения многих других важнейших целей и этапов жизненного цикла АК: проектирования, испытаний, сертификации, эксплуатации.

Информационная технология идентификации и методы аппроксимации характеристик АК

Информационная технология идентификации в укрупненном виде состоит из следующих шести этапов:

- 1) получение исходных экспериментальных и расчетных данных;
- 2) первичная обработка и создание массива данных;
- 3) назначение областей аппроксимации в пространствах аргументов;
- 4) выбор метода аппроксимации и выполнение самой аппроксимации;
- 5) разработка рабочих алгоритмов;
- 6) оценка точности.

Идентификация, как правило, требует творчества, носит характер исследования и лишь в редких случаях может быть полностью формализована. Исследовательский итерационный характер носят, в частности, такие этапы, как назначение областей аппроксимации, выбор метода аппроксимации и др.

Таким образом, процедура идентификации в целом относится к человеко-машинным процедурам исследовательского характера.

Есть основания предполагать, что структура описательной модели исследовательской деятельности человека может быть получена путем комплексирования модели действий оператора по управлению и модели обучения.

Действительно, исследовательский процесс базируется как на знаниях и мыслительных экспериментах (подобно процессу обучения), так и на действиях по управлению в ходе физических и численных экспериментов.

Структурная схема исследовательской деятельности человека-оператора (например, разработчика ТСО в процессе идентификации) объединяет прогнозно-оптимизационный механизм синтеза с мыслительными, численными и физическими экспериментами, интерактивной адаптацией модели. Здесь принципы психофизиологической функциональной системы П. К. Анохина переносятся на исследовательскую деятельность.

Конечно, возможны варианты структуры деятельности исследователя. Так, могут быть включены звенья оптимального планирования экспериментов, применяемого в разнообразных задачах получения экспериментальных данных [1, 2]. Структура может быть расширена за счет включения экспертных обучающих блоков [3].

В целом подобные модели исследовательской деятельности в процессе идентификации относятся, прежде всего, к первым из упомянутых операций (получение исходных расчетных и экспериментальных данных, их первичная обработка, создание массивов). Для идентификации летательных аппаратов это – предметы вычислительной аэродинамики [4], трубных, стендовых, летных испытаний [5, 6, 8].

К собственно аппроксимации в информационной технологии идентификации можно отнести четыре последние из вышеуказанных шести этапов идентификации. Именно эти этапы рассматриваются ниже с учетом следующих факторов [7]:

- а) необходимый объем и качество (точность) исходного экспериментального и расчетного материалов;
- б) вычислительные затраты и точность аппроксимации при рассматриваемом методе;
- в) вычислительные затраты при воспроизведении характеристик в процессе моделирования;
- г) воспроизведение производных, степень гладкости аппроксимирующей функции.

Вспомогательные операции при аппроксимации

При эвристическом выборе метода аппроксимации (и параметров метода) важным является создание образа аппроксимируемой функции. Для сложных функций многих переменных это непростая задача. Для иллюстрации обратимся к примеру. На рис. 1 приведены типовые характеристики коэффициента продольного момента $m_z(c_y, M)$ как функции числа M и коэффициента подъемной силы для дозвукового c_y (рис. 1,а) и сверхзвукового (рис. 1,б) самолетов [8].

Анализ рис. 1 доказывает наличие достаточно сложного характера соответствующих поверхностей. Правда, современные стандартные программные средства машинной графики позволяют наглядно демонстрировать двумерные поверхности, например, в изометрической и/или других проекциях.

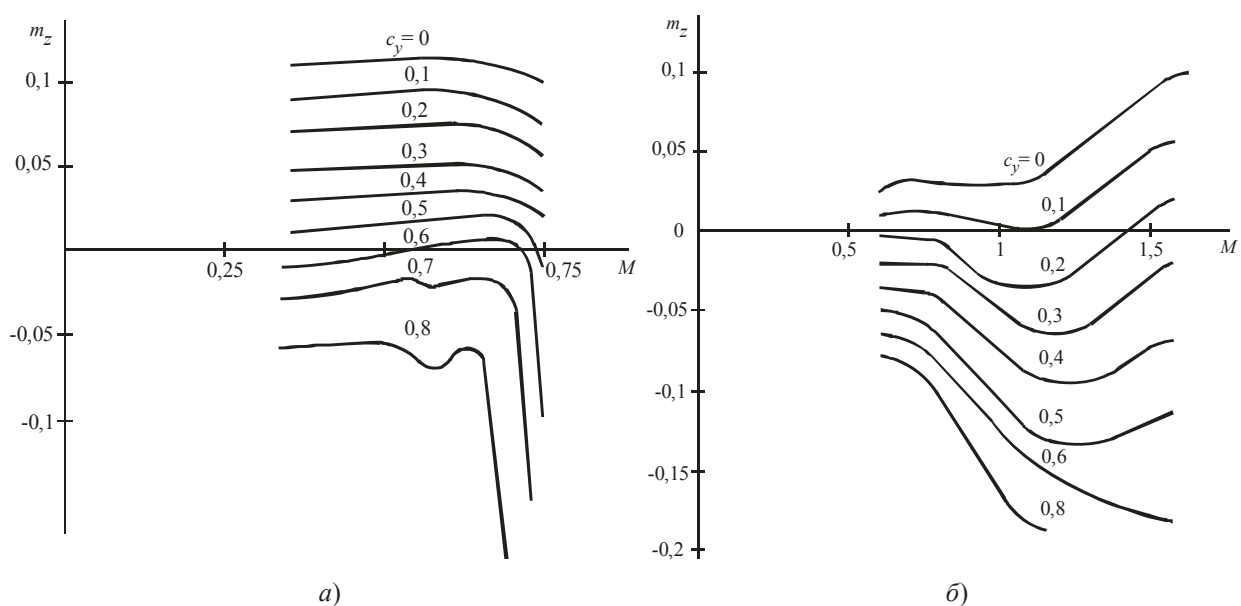


Рис. 1. Типовые характеристики $m_z(c_y, M)$ для дозвукового (а) и сверхзвукового (б) самолетов

Число аргументов функции m_z (как и других функций) может превышать пять и более. Мыслительные образы в многомерных пространствах формируются у человека с большим трудом вследствие его адаптированности к реальному двух- и трехмерному миру.

Ниже предлагается и обосновывается один из путей преодоления этих трудностей посредством перехода к спектральному представлению аппроксимируемых (интерполируемых) функций и формализованному определению густоты сетки интерполяции.

К числу вспомогательных операций при аппроксимации можно отнести и назначение областей аппроксимации в пространствах аргументов. Параметры полета, параметры режима силовой установки и другие компоненты вектора состояния современного АК подчиняются многочисленным сложным и достаточно жестким эксплуатационным ограничениям. Все эти ограничения должны выдерживаться в имитационном полете. При отработке умений и навыков действий в нештатных ситуациях эксплуатационные ограничения могут уступать место предельным ограничениям.

Эксплуатационные ограничения по высоте полета H и числу Маха M иллюстрирует рис. 2 [7]. Здесь указаны факторы, определяющие границы области ограничений: «болтанка» на малой высоте и высокой скорости, максимально допустимый по прочности конструкции скоростной напор $q_{\max}$, предельно допустимое (из-за нагрева) число $M_{\text{пред}}$, «тряска», минимальная (иволютивная) воздушная скорость $V_{\min}$.

Как отмечалось выше, эти и другие ограничения в имитируемом полете должны выдерживаться. Однако общая область ограничений в многомерном пространстве состояний получается очень сложной, неудобной для аппроксимации. Обычно целесообразно ее расширение до простой формы прямоугольного многомерного параллелепипеда в пространстве состояний. Соответствующее сечение этого параллелепипеда на рис. 2 обозначено пунктиром. Расширенную область в пространстве аргументов будем обозначать G_{Σ} . Она может включать часть, необходимую для имитации нештатных, критических режимов. Для этой части должен существовать исходный массив данных об аппроксимируемой функции и процесс аппроксимации, сходный с основной эксплуатационной областью. Здесь задача аппроксимации носит фиктивный характер, что будет пояснено в дальнейшем. Для этой части G_{Σ} нет необходимости иметь массив исходных данных об аппроксимируемой функции.

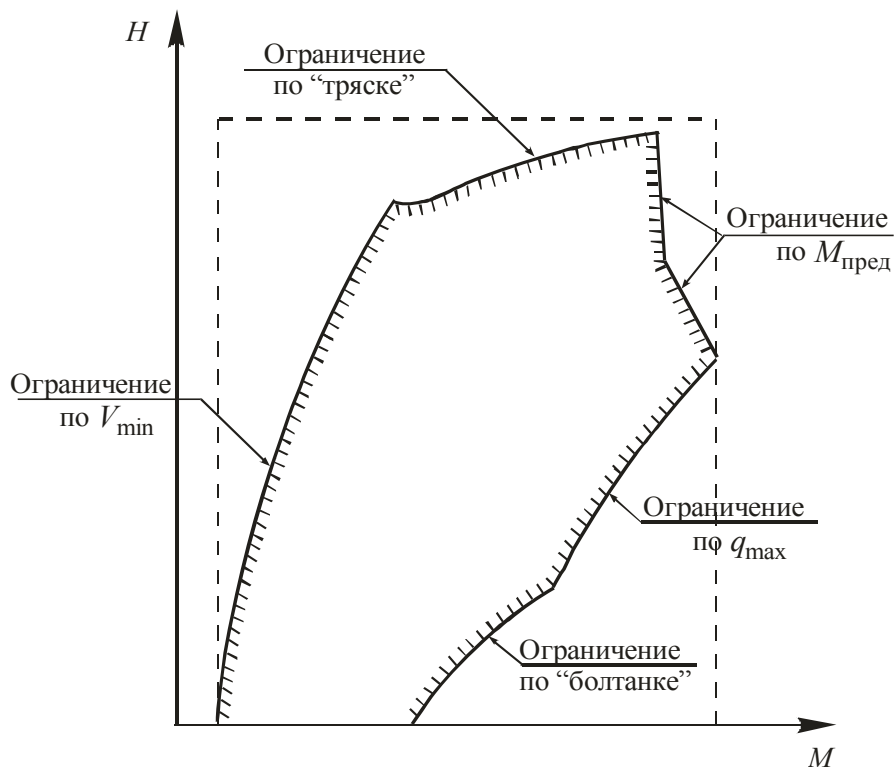


Рис. 2. Границы области эксплуатационных ограничений по высоте полета и числу Маха

К вспомогательным операциям аппроксимации можно отнести назначение дискретных (логических) аргументов – признаков. Под этим понимается следующее. Для современных пилотируемых АК характерны универсальность, адаптивность, получаемые за счет изменения конфигурации разнообразных органов разового управления. К таким средствам относится крыло переменной стреловидности, взлетно-посадочные средства (выпускное шасси, механизация крыла, тормозной парашют) и др. Эти средства обычно имеют лишь два (три) основных фиксированных положения, но влияние их на соответствующие характеристики существенно.

Так, если без учета изменения стреловидности и взлетно-посадочных средств коэффициент лобового сопротивления C_x считается функцией четырех аргументов: $c_x(\alpha, \beta, \delta_v, M)$, то с учетом угла стреловидности χ , выпуска шасси $\delta_{ш}$, тормозных щитков $\delta_{тщ}$ и тормозного парашюта $\delta_{тп}$ число аргументов возрастает до восьми:

$$c_x(\alpha, \beta, \delta_v, M, \chi, \delta_{ш}, \delta_{тщ}, \delta_{тп}). \quad (1)$$

Увеличение числа непрерывных аргументов резко увеличивает затраты на идентификацию и аппроксимацию. Однако рассматриваемые дополнительные аргументы являются в обычных применениях дискретными: χ принимает три значения, а $\delta_{ш}, \delta_{тщ}, \delta_{тп}$ вообще обозначают признаки «убрано – выпущено». Поэтому (1) можно заменить набором характеристик

$$c_{xv}(\alpha, \beta, \delta_v, M), \quad (2)$$

где номер v соответствует конфигурации, например: минимальная стреловидность, все посадочные средства выпущены.

При этом нет необходимости расширять пространство состояний в сравнении с исходным вариантом.

Полиномиальная аппроксимация

Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$, заданная в области $G_\Sigma \subset R^r$, аппроксимируется полиномом

$$\tilde{f} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_r} a_{k_1 k_2 \dots k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}, \quad (3)$$

где суммирование по k_j ($j = 1, 2, \dots, r$) ведется в пределах от $k_j = 0$ до N_j (целые положительные числа); $a_{k_1 k_2 \dots k_r}$ – постоянные коэффициенты.

При полиномиальной аппроксимации по методу наименьших квадратов задача формулируется как

$$\min_{a_{k_1 k_2 \dots k_r}} \int_{G_\Sigma} [f(x_1, x_2, \dots, x_r) - \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_r)]^2 dx_1 \dots dx_r. \quad (4)$$

Из этого получается система линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $a_{k_1 k_2 \dots k_r}$:

$$\sum A_{k_1+l_1 \dots k_r+l_r} a_{k_1 \dots k_r} = B_{l_1 \dots l_r}. \quad (5)$$

Здесь $l_1, \dots, l_r$ пробегает те же значения, что и $k_1, \dots, k_r$. Коэффициенты A, B выражаются формулами

$$A_{k_1+l_1 \dots k_r+l_r} = \int_{G_\Sigma} x_1^{k_1+l_1} \dots x_r^{k_r+l_r} dx_1 \dots dx_r, \quad (6)$$

$$B_{l_1 \dots l_r} = \int_{G_\Sigma} f(x_1, \dots, x_r) x_1^{l_1} \dots x_r^{l_r} dx_1 \dots dx_r. \quad (7)$$

Число неизвестных и число линейных уравнений здесь равны

$$N_{\Sigma} = (1 + N_1)(1 + N_2) \dots (1 + N_r). \quad (8)$$

При $r = 2$, $N_1 = N_2 = 3$, $N_{\Sigma} = 16$. Аппроксимирующий полином в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{02}x_2^2 + a_{11}x_1x_2 + \\ & + a_{30}x_1^3 + a_{03}x_2^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{111}x_1x_2x_3 + \\ & + a_{31}x_1^3x_2 + a_{13}x_1x_2^3 + a_{32}x_1^3x_2^2 + a_{23}x_1^2x_2^3 + a_{33}x_1^3x_2^3. \end{aligned}$$

При тех же наибольших степенях $N_1 = N_2 = \dots = N_r = 3$, но $r = 4$ $N_{\Sigma} = 256$, при $r = 5$ $N_{\Sigma} = 1024$. Из этого ясно, что для аппроксимации функций многих аргументов метод в его изложенной форме мало пригоден. Решение системы линейных уравнений (в том числе плохо обусловленных) столь высоких размерностей всегда требует весьма высоких вычислительных затрат (см. фактор б), указанный выше). В принципе возможно определение коэффициентов $a_{k_1k_2\dots k_r}$ путем непосредственной минимизации функционала разности $f - \tilde{f}$ (см. выражение (4)).

Для этого, в частности, может применяться новый эффективный метод решения многоэкстремальных задач (характерно, что вычислительные методы решения различных задач оказываются взаимосвязанными). Однако трудности в отношении фактора в) (большие вычислительные затраты при воспроизведении функций многих аргументов) при полиномиальной аппроксимации сохраняются.

Широко известный путь снижения вычислительных трудностей полиномиальной аппроксимации функций многих аргументов заключается в переходе к кусочно-полиномиальной аппроксимации. При этом вся область G_{Σ} разбивается на подобласти (субобласти), в которых аппроксимирующие полиномы могут иметь пониженные степени при сохранении точности аппроксимации. Разбиение на субобласти иногда ведется на основе физических закономерностей (например: дозвуковые, трансзвуковые и сверхзвуковые режимы полета). В этом случае субобласти обычно получают крупными и трудности, связанные с высокими необходимыми степенями полиномов и высокими размерностями пространства аргументов, в значительной мере сохраняются.

При делении области G_{Σ} на множество субобластей в виде ячеек правильной сетки можно применять полиномы низких степеней (вплоть до кусочно-линейной интерполяции, рассматриваемой ниже).

В последние десятилетия бурно развивается сплайн-аппроксимация, сплайн-интерполяция [8]. Это кусочно-полиномиальная аппроксимация (интерполяция), удовлетворяющая определенным условиям гладкости. Для функций одного-двух аргументов соответствующие теория и практика применения достигли высокого уровня развития. Однако с увеличением размерности пространства аргументов трудности здесь также быстро нарастают.

Другое направление составляет приближение ортогональными базисными функциями. Из этого направления кратко рассмотрим гармоническую аппроксимацию.

Гармоническая аппроксимация

Пусть функция $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$, заданная в прямоугольной области

$$-L_j = -N_j\Delta_j \leq x_j \leq L_j = N_j\Delta_j, (j = 1, 2, \dots, r), \quad (9)$$

аппроксимируется суммой Фурье:

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & \sum_{v_1, v_2, \dots, v_r} \left\{ a_{v_1v_2\dots v_r} \cos \left[\pi \left(v_1 \frac{x_1}{L_1} + v_2 \frac{x_2}{L_2} + \dots + v_r \frac{x_r}{L_r} \right) \right] + \right. \\ & \left. + b_{v_1v_2\dots v_r} \sin \left[\pi \left(v_1 \frac{x_1}{L_1} + v_2 \frac{x_2}{L_2} + \dots + v_r \frac{x_r}{L_r} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $v_j = 0, 1, \dots, N_j$; $j = 1, 2, \dots, r$; $a_{v_1v_2\dots v_r}$, $b_{v_1v_2\dots v_r}$ – постоянные коэффициенты.

Эти коэффициенты в принципе могут приближенно определяться посредством дискретного обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} a_{v_1 \dots v_r} &= \frac{2}{N_1 \dots N_r} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} f(\varepsilon_1 \Delta_1, \dots, \varepsilon_r \Delta_r) \cos\left(\frac{\pi v_1 \varepsilon_1}{N_1}\right) \dots \cos\left(\frac{\pi v_r \varepsilon_r}{N_r}\right), \\ b_{v_1 \dots v_r} &= \frac{2}{N_1 \dots N_r} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} f(\varepsilon_1 \Delta_1, \dots, \varepsilon_r \Delta_r) \sin\left(\frac{\pi v_1 \varepsilon_1}{N_1}\right) \dots \sin\left(\frac{\pi v_r \varepsilon_r}{N_r}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь ε_j – целые числа, изменяющиеся в пределах $-N_j \leq \varepsilon_j \leq N_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, r$.

Общее число коэффициентов в выражении (10) равно

$$N_\Sigma = 2 \prod_{j=1}^r (2N_j + 1), \quad (12)$$

т.е. даже больше, чем в выражении (8). Однако многими гармониками из этого числа обычно можно пренебречь. Некоторым подтверждением этого является выражение (10) для среднего квадрата функции в области G_Σ (9). Ввиду ортогональности тригонометрических базисных функций среднее значение $\tilde{f}^2$ равно:

$$\overline{\tilde{f}^2} = \frac{1}{2^r L_1 \dots L_r} \int_{G_\Sigma} \tilde{f}^2 dx_1 \dots dx_r = \frac{1}{2} \sum_{v_1 \dots v_r} (a_{v_1 \dots v_r}^2 + b_{v_1 \dots v_r}^2) \quad (12)$$

(в данном случае постоянная составляющая считается отсутствующей).

Для задач моделирования в ТСО точность исходных массивов данных обычно невысока (ошибки исчисляются процентами) и на основе (12) можно предполагать, что коэффициенты, которые на порядок и более меньше остальных, могут быть отброшены.

Главным достоинством гармонического (спектрального) представления (10) аппроксимирующей функции является возможность формализованного анализа образа (топологии) функции с позиций необходимой детальности описания. Такой формализованный анализ требуется и для применения других, более удобных методов аппроксимации.

Таким образом, спектральное представление функций многих аргументов может выступать в роли трудоемкой, но разовой вспомогательной операции на стадии разработки специального программного обеспечения имитаторов ТСО.

При этом максимальные ошибки кусочно-линейной интерполяции могут составлять первые единицы процентов, но могут и превышать 10 %.

Заключение

Отметим, что тригонометрическая модель аппроксимируемой функции (10) имеет еще одно положительное качество. Ввиду ортогональности базисных функций она удобна для процессов идентификации [8]. При подобающем выборе информационной технологии идентификации коэффициенты гармоник определяются уже не по формулам (10), а непосредственно в ходе получения и обработки экспериментальных данных.

Список литературы

1. Круг, Г. К. Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции / Г. К. Круг, Ю. А. Сосулин, В. А. Фатуев. – М. : Наука, 1977. – С. 208.
2. Ермаков, С. М. Математическая теория оптимального эксперимента / С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский. – М. : Наука, 1987. – С. 320.
3. Ларичев, О. И. Проблемы, методы и системы извлечения экспертных знаний / О. И. Ларичев, В. К. Моргоев // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 6. – С. 3–27.
4. Исследование сверхзвуковой аэродинамики самолетов на ЭВМ / С. М. Белоцерковский, Н. А. Кудрявцева, С. А. Попыталов, В. Г. Табачников. – М. : Наука, 1983. – 256 с.

5. Петров, К. П. Аэродинамика элементов летательных аппаратов / К. П. Петров. – М. : Машиностроение, 1985. – 374 с.
6. Пашковский, И. М. Летные испытания самолетов и обработка результатов испытаний / И. М. Пашковский, В. А. Леонов, Б. К. Поплавский. – М. : Машиностроение, 1985. – С. 415.
7. Красовский, А. А. Математическое моделирование и компьютерные системы обучения и тренажа / А. А. Красовский. – М. : Изд-во ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1989. – 178 с.
8. Красовский, А. А. Математическое моделирование динамики полета летательного аппарата : моногр. / А. А. Красовский, Э. В. Лапшин, Н. К. Юрков ; под ред. Э. В. Лапшина. – Пенза : Изд-во ПФ РГУ ИТП, 2008. – 260 с.

УДК 629.7.072.8

Лапшин, Э. В.

Методы аппроксимации функций многих переменных авиационных комплексов / Э. В. Лапшин // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 4. – С. 14–20.

Лапшин Эдуард Владимирович

доктор технических наук, профессор,
кафедра конструирования
и производства радиоаппаратуры,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
(8412) 56-43-46,
E-mail: kipra@pnzgu.ru

Аннотация. Рассматривается необходимый объем и качество (точность) исходного экспериментального и расчетного материалов; вычислительные затраты и точность аппроксимации при рассматриваемом методе; вычислительные затраты при воспроизведении характеристик в процессе моделирования.

Ключевые слова: математическое моделирование, аппроксимация, оптимальное планирование экспериментов, имитаторы.

Lapshin Eduard Vladimirovich

doctor of technical science, professor,
sub-department of radio equipment
design and production,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Abstract. Discusses the required volume and quality (accuracy) of the original pilot and checking materials; computational cost and accuracy when the method; the overhead of the playing characteristics during simulation.

Key words: mathematical modelling, approximation, the optimal design of experiments, simulators.